Konstrukcja liczb rzeczywistych przy pomocy ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych

Marcin Michalski, 2015-

1 Wprowadzenie

Jedną z intuicji na temat liczb rzeczywistych jest myślenie o nich jako liczbach, które można dobrze (z dowolną dokładnością) przybliżyć np. pewnym ułamkiem w rozwinięciu dziesiętnym. Chociażby:

$$\pi = 3.141592...$$

możemy przybliżać kolejno przez 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, itd. Intuicja, aby skojarzyć z daną liczbą rzeczywistą ciąg liczb wymiernych do niej zbieżny generalnie jest słuszna, trzeba nią jednak posłużyć się rozważnie. Istnieje wiele ciągów liczb wymiernych zbieżnych do danej liczby rzeczywistej (kłopot z jednacznością), oraz nie jest trywialną sprawą określić liczbę rzeczywistą przez ciąg liczb wymiernych do niej zbieżny nie mając jeszcze do dyspozycji samych liczb rzeczywistych (ciąg liczb wymiernych zbieżny do... No właśnie, czego?). W tej sprawie przychodzą nam w sukurs...

2 Ciągi Cauchy'ego i pewna relacja

Z ciągami zbieżnymi silnie związane są ciągi Cauchy'ego. Dla skupienie uwagi przywołajmy ich definicję.

Definicja 2.1. *Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeśli:*

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)(|x_n - x_m| < \epsilon)$$

Definicję tę jednak trzeba odrobinę stuningować, aby odpowiadała naszym potrzebom, tj. wyrugować z niej liczby rzeczywiste. Mamy więc następujący, równoważny sposób na wypowiedzenie, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego:

$$(\forall\omega > 0, \omega \in \mathbb{Q})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)(|x_n - x_m| < \omega).$$

Ba! Możemy nawet zamienić $(\forall\omega > 0, \omega \in \mathbb{Q})$... na $(\forall k \in \mathbb{N}...)$ i zażądać $|x_n - x_m| < \frac{1}{k+1}$ (patrz Ćwiczenie 1). Od teraz za każdym razem, gdy będziemy pisać "$\forall\epsilon > 0$", uznamy, że ϵ jest liczbą wymierną.

Bycie ciągiem Cauchy'ego ujmuje właśnie tę cechę, którą chcemy wyrazić, tzn. dla dostatecznie odległych wyrazów ciąg ten kumuluje się w pewnym małym otoczeniu. Dla ciągów

zbieżnych jest to faktycznie otoczenie granicy ciągu, jednak żyjąc w liczbach wymiernych takiej granicy dla ciągu Cauchy'ego może nie być. Chcemy zatem uzupełnić zbiór liczb wymiernych o te "brakujące" granice.
W tym celu oznaczmy przez $\mathcal{C}$ zbiór ciągów Cauchy'ego o wyrazach wymiernych oraz zdefiniujmy relację $\sim$ nad $\mathcal{C}$:

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Słownie: dwa ciągi Cauchy'ego liczb wymiernych są w relacji $\sim$, jeśli od pewnego momentu są blisko siebie. Jak istotna jest to dla nas relacja, pokazuje następujący fakt.

Fakt 2.1. $\sim$ *jest relacją równoważności.*

Dowód. Trzeba sprawdzić, czy relacja ta jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Niech (p_n), (q_n) oraz (r_n) będą ciągami z $\mathcal{C}$.

- Zwrotność:

Oczywista, ponieważ $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_n) = 0$.

- Symetryczność:

Oczywista z własności modułu liczby wymiernej ($|p_n - q_n| = |q_n - p_n|$).

- Przechodniość:

Trochę mniej oczywista. Niech $(p_n) \sim (q_n)$ oraz $(q_n) \sim (r_n)$. Ustalmy dowolnie $\epsilon > 0$. Wtedy istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > N_1$ $|p_n - q_n| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz istnieje $N_2 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > N_2$ $|q_n - r_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Wtedy też dla $n > max\{N_1, N_2\}$ mamy:

$$|p_n - r_n| = |p_n - q_n + q_n - r_n| \leqslant |p_n - q_n| + |q_n - r_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

co z dowolności ϵ oznacza, że $\lim_{n\to\infty}(p_n - r_n) = 0$, a zatem $(p_n) \sim (r_n)$.

$\square$

Jest zatem $\sim$ relacją równoważności i mamy rozbicie $\mathcal{C}$ na rozłączne klasy abstrakcji. Jeśli dwa ciągi są w danej klasie, to znaczy, że od odpowiednio dalekiego miejsca różnią się dowolnie mało. Wobec tego... (uwaga, uwaga!)

Definicja 2.2. *Zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy $\mathcal{C}/_\sim$, tzn. liczbami rzeczywistymi są klasy abstrakcji ciągów Cauchy'ego o wyrazach wymiernych.*

3 Liczby rzeczywiste

Możemy zatem się już cieszyć liczbami rzeczywistymi... Czy aby na pewno? Na pierwszy rzut oka nie przypomina to, wydawać by się mogło, starych i dobrze znanych liczb rzeczywistych. Pokażemy jednak, że rzeczywiście klasy abstrakcji ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych to liczby rzeczywiste. A uczynimy to przez sprawdzenie, że spełniają wszystkie wymagane aksjomaty.
Na początek możemy zlokalizować w tym zbiorze liczby wymierne. Umówmy się również na oznaczenie, że klasą danego ciągu $(x_n) \in \mathcal{C}$ jest $[(x_n)]$.

Definicja 3.1. *Liczbą wymierną w $\mathcal{C}/_\sim$ nazywamy $[(q, q, ...)]$ dla $q \in \mathbb{Q}$.*

Następnie zobaczmy jak wygląda dodawanie i mnożenie w $\mathcal{C}/_\sim$.

Definicja 3.2. *Niech $x, y \in \mathcal{C}/_\sim$ oraz $x = [(x_n)]$ i $y = [(y_n)]$ dla pewnych ciągów $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$. Wtedy:*

1. $x + y = [(x_n + y_n)]$
2. $x \cdot y = [(x_n \cdot y_n)]$

Definiując działania angażujące klasy abstrakcji musimy sprawdzić, czy są one dobrze określone, tzn. czy przypadkiem wybór innych reprezentantów z klasy nie spowoduje otrzymania innego wyniku dodawania lub mnożenia. Dowiedziemy następujący

Fakt 3.1. *Dodawanie i mnożenie w $\mathcal{C}/_\sim$ są dobrze określone.*

Dowód. Niech $(x'_n) \sim (x_n)$ i $(y'_n) \sim (y_n)$. Pokażemy najpierw, że $[(x_n + y_n)] = [x'_n + y'_n]$. Mamy:

$$(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n) = (x_n - x'_n) + (y_n - y'_n) \to^{n\to\infty} 0,$$

Z równoważności odpowiednio ciągów (x_n) i (x'_n) oraz (y_n) i (y'_n).
Dla mnożenia wygląda to następująco:

$$x_n y_n - x'_n y'_n = x_n(y_n - y'_n) + y'_n(x_n - x'_n) \to^{n\to\infty} 0,$$

$\square$

Mając podstawowe działania łatwo pokazać, korzystając głównie z arytmetyki granic, że faktycznie $\mathcal{C}/_\sim$ spełnia pozostałe aksjomaty tych działań dotyczące, jak przemienność, łączność, rozdzielność, i istnienie 0. Nieco więcej uwagi wymaga

Fakt 3.2. *Dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ istnieje liczba rzeczywista y taka, że $xy = 1$.*

Nim przejdziemy do dowodu tego faktu, udowodnimy techniczny, acz przydatny, lemat.

Lemat 3.1. *Jeśli $\mathcal{C} \ni (x_n) \notin [(0, 0, ...)]$, to (x_n) od pewnego miejsca nie zmienia znaku i ma wyrazy oddalone od 0 o dodatnią stałą.*

Dowód. $(x_n) \notin [(0, 0, ...)]$ oznacza, że (x_n) nie jest zbieżny do 0. Stąd istnieje dodatnie $M \in \mathbb{Q}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $k > n$, że:

$$|x_k| \geqslant 2M.$$

(x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $m, n > N$:

$$|x_n - x_m| < M.$$

Dla N istnieje $k > N$, że:

$$|x_k| \geqslant 2M.$$

Ponadto:

$$|x_k| \leqslant |x_k - x_n| + |x_n|,$$

a ponieważ $k > N$, to dla $n > N$ mamy:

$$|x_n| \geqslant |x_k| - |x_k - x_n| \geqslant 2M - M = M > 0.$$

Teraz załóżmy, że $x_{N+1} > 0$. Gdyby dla pewnego $n > N$ zachodziło $x_n < 0$, to mielibyśmy $x_n \leqslant -M$ i

$$x_{N+1} - x_n \geqslant 2M,$$

wbrew własności Cauchy'ego. □

Dowód. (**Faktu 3.2**) Niech $x = [(x_n)]$ dla pewnego $(x_n) \notin [(0, 0, ...)]$. Wobec powyższego Lematu istnieje $M \in \mathbb{Q}$ i $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ zachodzi $|x_n| > M > 0$. Weźmy zatem ciąg $(y_n) = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{N-razy}, \frac{1}{x_N}, \frac{1}{x_{N+1}}, ...)$ i połóżmy $y = [(y_n)]$. Wtedy xy jest klasą abstrakcji ciągu od pewnego momentu stale równego 1, a więc $xy = 1$. Dowód jest prawie skończony, należałoby jeszcze tylko udowodnić legalność $[(q_n)]$, tzn., że (q_n) jest ciągiem Cauchy'ego o wyrazach wymiernych. Ten fakcik zostawimy jako ćwiczenie (patrz 2). □

Powiedzmy teraz co nieco o porządku w $\mathcal{C}/_\sim$.

Definicja 3.3. *Niech $x = [(x_n)]$ dla pewnego $(x_n) \in \mathcal{C}$. Mówimy, że $x > 0$, jeśli $x \neq 0$ i (x_n) ma od pewnego miejsca wyrazy dodatnie.*
Powiemy, że $x > y$, jeśli $x - y > 0$.

Naturalnie i tym razem powinniśmy sprawdzić, że powyższe definicje są dobrze określone. Argumentacja przebiega podobnie do tego, co działo się w Lemacie 3.1. Należałoby też sprawdzić, że " $>$ " jest rzeczywiście (ostrym) porządkiem. Zostawimy to jako ćwiczenia (patrz 3).
Udowodnimy kilka własności tak zdefiniownego porządku.

Fakt 3.3. *Nierówność jest zachowana przy dodawaniu stronami, tzn. dla liczb rzeczywistych x, y, z, jeśli $x > y$, to $x + z > y + z$.*

Dowód. Niech $x = [(x_n)]$, $y = [(y_n)]$ oraz $z = [(z_n)]$. $x - y > 0$, zatem ciąg $(x_n - y_n)$ ma od pewnego miejsca wyrazy większe od 0. Tym samym taką własność ma ciąg $((x_n + z_n) - (y_n + z_n))$ i nadal nie jest to ciąg równoważny ciągowi stale równemu 0. Stąd $x + z > y + z$. □

Nieomal identycznie dowodzi się

Fakt 3.4. *Dla liczb rzeczywistych x, y i z, jeśli $x > y$ i $z > 0$, to $xz > yz$.*

Zachodzi również...

Fakt 3.5. *(Prawo trychotomii) Dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y mamy $x > y$ lub $x = y$ lub $y > x$.*

Dowód. Załóżmy, że $x \neq y$. Niech $x = [(x_n)]$ i $y = [(y_n)]$. Wtedy $(x_n - y_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego nierównoważnym ciągowi stale równemu 0. Na mocy Lematu 3.1 ciąg ten jest od pewnego momentu oddzielony od 0 dodatnią stałą i nie zmienia znaku. Wobec tego $x - y > 0$ lub $x - y < 0$. □

Pokażemy także, że zbiór $\mathbb{Q}$ (dobrze rozumiany) jest gęsty w $\mathcal{C}/_\sim$, tzn.

Fakt 3.6. *Niech x i y będą liczbami rzeczywistymi. Jeśli $x > y$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$, że $x > q > y$.*

Dowód. Niech $x = [(x_n)]$ i $y = [(y_n)]$. $x > y$, więc $x - y > 0$, a stąd istnieje $M > 0$ (wymierne) i $N_1 \in \mathbb{N}$, że $x_n - y_n > M$ dla $n > N_1$ (Lemat 3.1). Ponadto, ponieważ y_n jest Cauchy'ego, to dla $\frac{M}{2}$ istnieje N_2, że dla $n, m > N_2$ mamy $|y_n - y_m| < \frac{M}{2}$. Ustalmy $N > N_1, N_2$. Wtedy dla $n > N$:

$$x_n > \frac{M}{2} + y_N,$$

ponieważ:

$$x_n - y_N = x_n - y_n + y_n - y_N > M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2},$$

co daje $x_n > \frac{M}{2} + y_N$. Ponadto $\frac{M}{2} + y_N > y_n$, bo $\frac{M}{2} > y_n - y_N$. Zatem ostatecznie:

$$x_n > \frac{M}{2} + y_N > y_n$$

i $\frac{M}{2} + y_N \neq x, y$. Kładąc zatem $q = \frac{M}{2} + y_N$ otrzymujemy to, czego potrzebowaliśmy. □

Przyda nam się również...

Fakt 3.7. *(Zasada Archimedesa dla $\mathcal{C}/_\sim$) Niech $0 < x < y$ będą liczbami rzeczywistymi. Wtedy istnieje $N \in \mathbb{N}$, że $Nx > y$.*

Dowód. Z gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathcal{C}/_\sim$ istnieje $q \in \mathbb{Q}$, że $0 < q < x$. To oznacza, że również $q < y$. Niech $y = [(y_n)]$. Z definicji istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla $n > n_0$ $y_n - q > 0$. Ciągi Cauchy'ego są ograniczone (Ćwiczenie 4), zatem (x_n) jest ograniczony, powiedzmy że przez M (dla wygody-wymierne). Wtedy z zasady Archimedesa dla liczb wymiernych istnieje $N \in \mathbb{N}$, że $Nq > M$. Dla wszystkich $n > n_0$ mamy $Nq > M \geqslant x_n$, więc $Nq > y$, a zatem również $Nx > y$. □

Będąc wyekwipowani w porządek możemy zdefiniować dla liczb rzeczywistych moduł tak samo, jak dla liczb wymiernych, tzn.

Definicja 3.4. *Niech x będzie liczbą rzeczywistą. Wtedy $|x| = x$, gdy $x \geqslant 0$ i $|x| = -x$, gdy $x < 0$. $|x|$ nazywamy modułem liczby x.*

Wraz z modułem dostajemy wszystkiego jego "normalne" własności, w tym np. nierówność trójkąta (proste ćwiczenie). Zauważmy również, że na dobrą sprawę, jeśli $x = [(x_n)]$, to możemy utożsamić $|x|$ z $[(|x_n|)]$.
Za dobrze określonym modułem liczby rzeczywistej przychodzi również dobrze określona zbieżność ciągów liczb rzeczywistych oraz własność Cauchy'ego. W ten sposób zbliżamy się nieuchronnie do ostatniej własności zbioru liczb rzeczywistych, którą chcemy udowodnić.

Twierdzenie 3.1. *$\mathcal{C}/_\sim$ spełnia aksjomat ciągłości Dedekinda, tzn. dla każdego ograniczonego z góry niepustego zbioru $A \subset \mathcal{C}/_\sim$ mamy* $\sup A \in \mathcal{C}/_\sim$.

Zanim jednak to zrobimy, musimy się przygotować. Od teraz sprawy trochę się skomplikują. W zasadzie całą robotę zrobi za nas następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2. *Każdy ciąg Cauchy'ego liczb rzeczywistych jest zbieżny.*

Dowód. Niech (x_n) będzie ciągiem Cauchy'ego liczb rzeczywistych, czyli:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)(|x_n - x_m| < \epsilon).$$

Rozszyfrujmy co to właściwie znaczy. Nasamprzód zauważmy, że każdy wyraz x_n tego ciągu sam jest ciągiem Cauchy'ego liczb wymiernych. Oznaczmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = [(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}]$$

Zauważmy, że z własności modułu i porządku własność Cauchy'ego ciągu (x_n) możemy wyrazić w następujący sposób (ϵ i N jak powyżej):

$$(\forall n, m \geqslant N)(\exists J \in \mathbb{N})(\forall j > J)(|x_n^j - x_m^j| < \epsilon) \tag{$*$}$$

Jak już wspomnieliśmy, każdy x_n sam jest ciągiem Cauchy'ego, dla skupienia uwagi napiszmy to precyzyjnie:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k, l > K)(|x_n^k - x_n^l| < \epsilon).$$

Zwróćmy uwagę na to, że raz ϵ oznacza ciąg "epsilonów", gdy porównujemy go z liczbą rzeczywistą, a innym razem po prostu liczbę wymierną. Nie będziemy się tym przejmować, ale warto zwrócić uwagę na tę drobną subtelność.
Naszym celem będzie teraz wskazanie granicy $g = [(g_n)]$ dla pewnego podciągu ciągu (x_n). Powodem, dla którego skupimy się na podciągu jest fakt, że wskazywanie granicy dla całego ciągu byłoby dużo cięższe, a wskazanie zbieżnego podciągu nam wystarczy, ponieważ ciąg Cauchy'ego, który ma podciąg zbieżny, jest zbieżny w całości (Ćwiczenie 5). Zacznijmy zatem dłubaninę.
Ustalmy ciąg epsilonów (wymiernych) (ϵ_n) zbieżny do 0. Określmy pewne ciągi (N_n), (K_n) liczb naturalnych. Ciąg (N_n) taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$(\forall k, l \geqslant N_n)(|x_k - x_l| < \epsilon_n)$$

(możemy to zrobić, bo (x_n) jest Cauchy'ego), oraz (K_n) o własności:

$$(\forall k, l \geqslant K_n)(|x_{N_n}^k - x_{N_n}^l| < \epsilon_n)$$

(to wynika z faktu, że każdy x_n jest Cauchy'ego). Nic nie stoi na przeszkodzi, by oba ciągi uczynić rosnącymi. Dodatkowo zdefiniujmy jeszcze $J_{n,k}$ takie, że dla $j \geqslant J_{n,k}$:

$$|x_{N_n}^j - x_{N_k}^j| < max\{\epsilon_n, \epsilon_k\},$$

czego możność wykonania wynika z $*$. Dokładniej, załóżmy, że $n > k$. Wtedy naszemu ϵ_n odpowiada N_n, że dla liczb $l, m \geqslant N_n$ istnieje J, że dla $j \geqslant J$:

$$|x^j_l - x^j_m| < \epsilon_n.$$

Analogicznie dla k. Teraz, ponieważ $N_n > N_k$, w szczególności dla ϵ_k i odpowiadającemu mu N_k, wstawiając za l, m powyżej N_n i N_k (oba $\geqslant N_k$), otrzymujemy

$$|x^j_{N_n} - x^j_{N_k}| < \epsilon_k,$$

o ile $j \geqslant J$ dla pewnego istniejącego $J \in \mathbb{N}$. To J jest naszym $J_{n,k}$.
Określmy $g = [(g_n)]$ następująco:

$$g_n = x^{K_n}_{N_n}.$$

Aby się przekonać, że g jest określone poprawnie, trzeba pokazać, że g jest ciągiem Cauchy'ego. Dla $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$, mamy:

$$|g_n - g_k| = |x^{K_n}_{N_n} - x^{K_k}_{N_k}| \leqslant |x^{K_n}_{N_n} - x^j_{N_k}| + |x^j_{N_k} - x^{K_k}_{N_k}| \leqslant |x^{K_n}_{N_n} - x^j_{N_n}| + |x^j_{N_n} - x^j_{N_k}| + |x^j_{N_k} - x^{K_k}_{N_k}|,$$

gdzie j dobieramy $\geqslant max\{K_n, J_{n,k}, K_k\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} |x^{K_n}_{N_n} - x^j_{N_n}| &< \epsilon_n, \\ |x^j_{N_n} - x^j_{N_k}| &< \epsilon_k, \\ |x^j_{N_k} - x^{K_k}_{N_k}| &< \epsilon_k, \end{aligned}$$

zatem $|g_n - g_k| < 2\epsilon_k + \epsilon_n$. Wyrażenie to możemy to uczynić dowolnie małym biorąc odpowiednio dalekie n i k, więc (g_n) jest ciągiem Cauchy'ego. Pozostaje pokazać, że g jest granicą pewnego podciągu ciągu. Jak nietrudno odgadnąć, jest to podciąg $(x_{N_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Zauważmy, że aby oszacować $|x_{N_n} - g|$, trzeba szacować:

$$|x^k_{N_n} - g_k| = |x^k_{N_n} - x^{K_k}_{N_k}| \leqslant |x^k_{N_n} - x^{K_n}_{N_n}| + |x^{K_n}_{N_n} - x^{K_k}_{N_k}| = |x^k_{N_n} - x^{K_n}_{N_n}| + |g_n - g_k|.$$

Jeśli tylko weźmiemy $k > K_n$, to całość możemy oszacować przez $2\epsilon_k + 2\epsilon_n$. Stąd wynika, że rzeczywiście g jest granicą $(x_{N_n})_{n \in \mathbb{N}}$. □

Uf! Najgorsze w zasadzie już za nami, teraz odcinamy kupony. Zanim przejdziemy do dowodu głównego twierdzenia, będziemy potrzebować jeszcze jeden lemat.

Lemat 3.2. *Jeśli ciąg (x_n) liczb rzeczywistych jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest ciągiem Cauchy'ego.*

Dowód. Niech M będzie jego ograniczeniem z góry i przypuśćmy, że nie jest Cauchy'ego. Wtedy istnieje $\epsilon > 0$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją $n_0, m_0 > n$, że:

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| > \epsilon.$$

Z zasady Archimedesa istnieje $N \in \mathbb{N}$, że $N\epsilon > M - x_0$.
Dla $n = 0$ istnieją $n_0, m_0 > 0, n_0 > m_0$, że $x_{n_0} - x_{m_0} > \epsilon$, skąd $x_{n_0} - x_0 > \epsilon$
Dla $n = n_0$ istnieją $n_1, m_1 > n_0, n_1 > m_1$, że $x_{n_1} - x_{m_1} > \epsilon$, skąd $x_{n_1} - x_0 > 2\epsilon$.
$\vdots$
Iterując tak N-razy otrzymujemy $x_{n_N} - x_0 > N\epsilon > M - x_0$, czyli $x_{n_N} > M$. Sprzeczność dowodzi tezy. □

Dowód Twierdzenia 3.1: Niech A będzie zbiorem ograniczonym z góry przez M. Określimy dwa ciągi: (l_n) oraz (u_n).
$u_0 = M$, $l_0 = a$ dla pewnego $a \in A$. Dla $n > 0$ niech:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + l_n}{2},$$

jeśli $\frac{u_n+l_n}{2}$ jest ograniczeniem górnym A, w przeciwnym razie $u_{n+1} = u_n$;

$$l_{n+1} = \frac{u_n + l_n}{2},$$

jeśli $\frac{u_n+l_n}{2}$ nie jest ograniczeniem górnym A, w przeciwnym razie $l_{n+1} = l_n$.

Ciąg (l_n) jest ograniczony z góry i niemalejący, więc z marszu jest on Cauchy'ego. (u_n) jest nierosnący i ograniczony z dołu, więc $(-u_n)$ jest niemalejący i ograniczony z góry, więc jest Cauchy'ego, a stąd również (u_n) jest Cauchy'ego. Z Twierdzenia 3.2 oba te ciągi są zbieżne. Pokażemy, że zbiegają do jednej granicy poprzez udowodnienie, że są równoważne. Mamy:

$$u_n - l_n = \frac{u_{n-1} + l_{n-1}}{2} - l_{n-1} = \frac{1}{2}(u_{n-1} - l_{n-1})$$

lub

$$u_n - l_n = u_{n-1} - \frac{u_{n-1} + l_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}(u_{n-1} - l_{n-1}),$$

co w obu przypadkach daje to samo. Proste rozumowanie indukcyjne pokazuje, że:

$$u_n - l_n = 2^{-n}(u_0 - l_0),$$

co oczywiście jest zbieżne do 0.
Oznaczmy teraz $u = lim_{n\to\infty} u_n = lim_{n\to\infty} l_n$. Twierdzimy, że $u = \sup A$.
Przypuśćmy, że u nie jest ograniczeniem górnym zbioru A. Wtedy istnieje $a \in A$, $a > u$. Wtedy dla $a - u > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, że:

$$a - u > |u_N - u| = u_N - u,$$

czyli $a > u_N$, co jest stoi w sprzeczności z definicją (u_N) (zawsze wybieraliśmy ograniczenia górne A).
To może u nie jest ograniczeniem najmniejszym? Przypuśćmy, że istnieje M- ograniczenie górne A takie, że $M < u$. Posłużymy się ciągiem (l_n). $u - M > 0$, zatem istnieje $N \in \mathbb{N}$, że dla $n > N$:

$$u - l_n < u - M,$$

skąd $l_n > M$, co z kolei stoi w sprzeczności z definicją (l_n). To ostatecznie dowodzi, że $u = \sup A$, a więc że $\mathcal{C}/_\sim$ spełnia aksjomat ciągłości Dedekinda. $\square$

To w zasadzie kończy konstrukcję liczb rzeczywistych. Teraz z czystym sumieniem możemy napisać, że $\mathbb{R} = \mathcal{C}/_\sim$ i wiemy, że liczby rzeczywiste rzeczywiście istnieją, a nie funkcjonują li tylko jako aksjomatyczna struktura.

Ćwiczenie 1. *Pokaż równoważność definicji z różnymi typami epsilonów.*

Ćwiczenie 2. *Pokaż, że dla ciągu* $(x_n) \in \mathcal{C} \backslash [(0, 0, ...)]$ *o wyrazach różnych od 0 ciąg* $(\frac{1}{x_n})$ *również należy do* $\mathcal{C}$.

Ćwiczenie 3. *Pokaż, że definicja porządku na liczbach rzeczywistych jest dobrze określona.*

Ćwiczenie 4. *Pokaż, że ciągi Cauchy'ego są ograniczone.*

Ćwiczenie 5. *Pokaż, że jeśli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to jest zbieżny w całości.*